

Câu 1 (1,5 điểm) Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x + y - mz = 1 \\ x - my + z = 1 \\ -mx + y + z = -m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Câu 2 (2 điểm) (**Bài toán truyền nhiệt-Sưởi ấm hay làm mát tòa nhà-Heating and cooling of a building**)

Bài toán sưởi ấm hay làm mát một tòa nhà được mô hình (gần đúng) bởi phương trình vi phân

$$\frac{dT}{dt} = -k_1(T - T_a) - k_2(T - T_o) + P \quad (\text{với } k_1, k_2 = \text{const} > 0)$$

trong đó $T = T(t)$ là nhiệt độ tòa nhà ở thời điểm t , T_a là nhiệt độ bên ngoài tòa nhà, T_o là nhiệt độ chúng ta mong muốn trong tòa nhà, và $P = \text{const} > 0$ là tốc độ tăng nhiệt độ do thiết bị và con người bên trong tòa nhà. Giả sử đơn vị của nhiệt độ T là $^{\circ}\text{C}$, đơn vị của thời gian t là giờ. Giải phương trình vi phân tìm $T = T(t)$ theo các hằng số k_1, k_2, P khi biết $T_o = 20$ (đơn vị là $^{\circ}\text{C}$), $T_a = 25 - 5\cos\left(\frac{2\pi t}{24}\right)$ (đơn vị là $^{\circ}\text{C}$).

Câu 3 (2 điểm) (**Mô hình dao động**) Giải phương trình vi phân

$$y'' + 7y' + 12y = 3 + 2\sin 5t \quad \text{với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

Chúng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t . Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

Câu 4 (3 điểm)

a) Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' - 5y = e^{-3t} \\ x + y' + 6y = 6 \end{cases} \quad \text{với điều kiện } x(0) = 0, y(0) = 0$$

b) Giải phương trình tích phân

$$y(t) = 1 + e^{2t} - 10 \int_0^t y(u) \cos 3(t-u) du$$

Câu 5 (1,5 điểm) (**Mô hình logistic có thu hoạch-Logistic growth with harvesting**)

Bạn tham gia vào một dự án chăm sóc, bảo tồn, khai thác/thu hoạch phát triển bền vững một nguồn tài nguyên của đất nước. Giả sử lượng tài nguyên (tạm sử dụng đơn vị là: đơn vị tài nguyên) ở thời điểm t (đơn vị tính là năm) tính từ năm 2023 (tức là năm 2023 ứng với $t = 0$), được xấp xỉ bởi hàm $y(t)$, thỏa phương trình vi phân logistic có thu hoạch

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) - h, \quad y(0) = y_0 \quad (\text{lượng tài nguyên hiện tại là } y_0 \text{ đơn vị})$$

Khi $r = 0.5e^{-0.1t}$, $K = 100$, $y(0) = y_0 = 42$, $h = 0.3e^{-0.1t}y$ thì phương trình trở thành

$$\frac{dy}{dt} = 0.2e^{-0.1t}y - e^{-0.1t} \frac{y^2}{200}, \quad y(0) = 42$$

Lần lượt áp dụng phương pháp Euler (RK1) và phương pháp Euler cải tiến (RK2) với bước nhảy $h = 1$ đồng thời sử dụng máy tính (Casio), ước tính lượng tài nguyên các năm tiếp theo từ 2024 đến 2028. Cụ thể, trình bày vào bài thi bằng cách kẻ lại các bảng sau đây và điền đầy đủ những chỗ còn trống.

Công thức Euler (RK1) (giá trị đúng = $y(t_n) \approx y_n =$ giá trị gần đúng)	Bấm để màn hình Casio hiển thị (chưa chạy thuật toán) (RK1)
Công thức Euler cải tiến (RK2) (giá trị đúng = $y(t_n) \approx y_n =$ giá trị gần đúng)	Bấm để màn hình Casio hiển thị (chưa chạy thuật toán) (RK2)

Tiếp theo bấm CALC (chạy thuật toán) rồi điền kết quả đầy đủ vào bảng sau, lấy 2 chữ số sau dấu chấm “.” thập phân:

Năm	t_n	Giá trị gần đúng theo phương pháp Euler (Euler's Method) (đơn vị tài nguyên)	Giá trị gần đúng theo phương pháp Euler cải tiến (Improved Euler's Method) (đơn vị tài nguyên)
2023	0	42	42
2024	1		
2025	:		
2026			
2027			
2028			

❖ **Ghi chú :** Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Câu 1: Nắm vững phép toán ma trận, tính được định thức và ứng dụng, biết và thực hiện các cách giải hệ phương trình tuyến tính.	G1: 1.1, 1.2 ; G2:2.1,2.3 G2:2.1.3, 2.1.4 , 2.4.2,2.6;2.7
Câu 2, 3, 4: Nhận dạng được các bài toán trong thực tế được mô hình bởi phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân, phương trình tích phân. Giải được phương trình, hệ phương trình vi phân, phương trình tích phân và hiểu được ý nghĩa các kết quả tìm được.	G1: 1.1, 1.2, G2:2.1,2.3 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.6
Câu 5: Giải gần đúng phương trình vi phân bằng phương pháp số và ứng dụng vào thực tế.	G1: 1.1; G2:2,2.1,2.3 G2:2.1, 2.1.2, 2.4.2

Ngày 4 tháng 6 năm 2023
Thông qua Bộ môn Toán